

TEMA 1: ESPACIOS VECTORIALES

1. DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

Un espacio vectorial es una estructura algebraica, con una ley de composición interna y una ley de composición externa.

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo abeliano, cuyos elementos son *escalares*.

Sea V un conjunto formado por *vectores*.

En el conjunto V habrá dos leyes:

$$+: V \times V \rightarrow V \quad (\text{suma, l.c.i.})$$

$$\cdot: V \times V \rightarrow V \quad (\text{producto por escalares, l.c.e.})$$

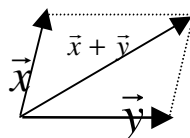
Propiedades para que V sea espacio vectorial sobre K

Considerando:
$$\begin{cases} \forall \lambda, \mu \in K \\ \forall x, y \in V \end{cases}$$

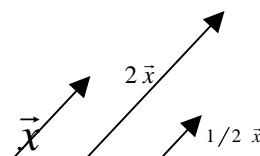
- $(V, +)$ ha de ser *grupo abeliano*.

Su elemento neutro es el vector nulo: $\vec{0}$

- $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$
- $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$



suma



producto por escalares

Otro espacio vectorial, aparte del de los vectores, es $R^2 = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$

$$+: R \times R \rightarrow R^2$$

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\cdot: R \times R^2 \rightarrow R^2$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Ejercicio: Justificar que el conjunto de polinomios de grado menor que tres es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales.

Propiedades consecuencia de la definición

Teorema: Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K . Se cumple:

- a) $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$
- b) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- c) $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ó } \vec{x} = \vec{0}$
- d) $(-\lambda)\vec{x} = \lambda(-\vec{x}) = -\lambda\vec{x}$

2. SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre K .

$U \subseteq V$ es subespacio vectorial si tiene las mismas propiedades que $(V, +, \cdot)$.

El propio conjunto, y el $\{\vec{0}\}$, siempre son subespacios vectoriales de V . Además, en todo subespacio siempre está el vector nulo.

Teorema de caracterización:

$$U \text{ es subespacio vectorial de } V \Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in K \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in U \quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in U$$

- Ejemplo:

¿Es un subespacio de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ el conjunto $U = \{(a, b) / a = b\}$?

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \in U \quad \vec{x} = (a, b) \quad a = b \rightarrow \vec{x} = (a, a)$$

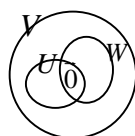
$$\vec{y} \in U \quad \vec{y} = (a', b') \quad a' = b' \rightarrow \vec{y} = (a', a')$$

$$\lambda(a, a) + \mu(a', a') = (\lambda a, \lambda a) + (\mu a', \mu a') = (\lambda a + \mu a', \lambda a + \mu a') \in U \Rightarrow U \text{ es subespacio}$$

Ejercicio: Probar si $W = \{(a, b) / b = 1\}$ es un subespacio vectorial.

Sean U y W dos subespacios vectoriales. No pueden ser disjuntos (siempre tienen como mínimo el $\{\vec{0}\}$ común).

Teorema: Sea V un espacio vectorial sobre K , y U y W dos subespacios de V .



$U \cap W$ es un subespacio vectorial de V

Demostración:

$$\forall \lambda, \mu \in K$$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in U \cap W \left\{ \begin{array}{l} \vec{x}, \vec{y} \in U \rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in U \\ \vec{x}, \vec{y} \in W \rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in W \end{array} \right\} \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in U \cap W$$

Combinación lineal de vectores

Sean $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vectores, llamaremos combinación lineal de ellos a cualquier expresión del tipo $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$.

Sea Γ un subconjunto de V , que no sea espacio vectorial, se puede encontrar un conjunto $\langle \Gamma \rangle$ que sí lo sea.

Sea V un espacio vectorial sobre K , y $\Gamma \subseteq V$. Se define el **subespacio generado** o **engendrado** por Γ , y se representa por $\langle \Gamma \rangle$, como:

$$\langle \Gamma \rangle = \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \mid \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \Gamma \text{ y } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

(es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores)

- *Ejemplo:* Sea $(R^3, +, \cdot)$

$$\begin{aligned} \langle (1,0,0), (1,1,0) \rangle &= \{ a(1,0,0) + b(1,1,0) \mid a, b \in R \} = \{ (a+b, b, 0) \mid a, b \in R \} \\ &= \{ (x, y, z) \mid z = 0 \} \end{aligned}$$

Dados dos conjuntos, es posible que el resultado de operar dos vectores esté fuera de su unión, por lo que se hace necesario definir un concepto (la suma), basándose en la combinación lineal.

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre K . Sean U y W subespacios vectoriales de V . Se define su **suma** de la siguiente forma:

$$U + W = \{ \vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U \text{ y } \vec{w} \in W \}$$

- *Ejemplo:* Sea $(R^3, +, \cdot)$

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{ a(1,0,0) + b(0,1,0) \mid a, b \in R \} = \{ (a, b, 0) \mid a, b \in R \}$$

$$W = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle = \{ a(1,1,0) + b(0,0,1) \mid a, b \in R \} = \{ (a, a, b) \mid a, b \in R \}$$

$$U \cap W = (a, a, 0)$$

(regla práctica: en la intersección se cogen las condiciones más restrictivas)

$$U + W = \{ (a, b, 0) + (a', a', b') \} = \{ (a + a', b + a', b') \mid a, b, a', b' \in R \} = R^3$$

(en este caso la suma da el propio espacio vectorial)

Teorema: $U + W = \langle U \cup W \rangle$

Demostración:

$$\begin{aligned}\vec{x} \in U + W &\Rightarrow \exists \vec{u} \in U \text{ y } \exists \vec{v} \in V \quad \vec{x} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u}, \vec{w} \in U \cup W \\ \vec{x} &= 1\vec{u} + 1\vec{w} \rightarrow \vec{x} \in \langle U \cup W \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} \in \langle U \cup W \rangle &\Rightarrow \exists \lambda_1 \dots \lambda_n \in K \text{ y } \exists \vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \in U \cup W \quad \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{x} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Si } \vec{x}_1 \dots \vec{x}_r \in U \rightarrow \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_r \vec{x}_r = \vec{u} \in U \\ \text{Si } \vec{x}_{r+1} \dots \vec{x}_n \in W \rightarrow \lambda_{r+1} \vec{x}_{r+1} + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{w} \in W \end{array} \right\} &\vec{x} = \vec{u} + \vec{w} \rightarrow \vec{x} \in U + W\end{aligned}$$

Por regla general, la suma permite escribir un vector como suma de vectores, de diversas formas posibles.

- *Ejemplo:* Sea $(R^3, +, \cdot)$

$$U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$$

$$W = \{(a, a, b) \mid a, b \in R\}$$

$$U + W \in R^3$$

$$\vec{x} = (2, 2, 0)$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (2, 2, 0) + (0, 0, 0) = (1, 1, 0) + (1, 1, 0) = \dots \\ &\in U \quad \in W \quad \in U \quad \in W\end{aligned}$$

Sin embargo, aparecen excepciones en algunos conjuntos, donde existe una única forma de escribir un vector.

- *Ejemplo:* Sea el conjunto $W' = \{(0, 0, a) \mid a \in R\}$

$$U + W \in R^3$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (1, 2, 0) \rightarrow \vec{x} = (1, 2, 0) + (0, 0, 0) \\ &\in U \quad \in W'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (0, 3, -5) = (0, 3, 0) + (0, 0, -5) \\ &\in U \quad \in W'\end{aligned}$$

Dados dos subespacios U y W de un espacio vectorial, decimos que su suma es **directa** si para cada dos vectores de $U + W$ existe un único vector de U y un único vector de W cuya suma sea el vector dado.

Teorema: Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre K , y sean U y W dos subespacios. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $U + W$ es directa. La suma directa se escribirá como $U \oplus W$.

b) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ con $\vec{x} \in U$ y $\vec{y} \in W \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$

c) $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Demostración: Se demostrarán las siguientes implicaciones: $a \Rightarrow b; b \Rightarrow c; c \Rightarrow a$

$a \Rightarrow b$

Queremos demostrar: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ con $\vec{x} \in U$ y $\vec{y} \in W \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$

\Leftarrow es trivial

\Rightarrow Como la suma es directa, hay una única forma de expresar el vector como suma de uno de U y uno de W .

Si $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, ya tenemos dicha única forma, y en ella, $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$.

$b \Rightarrow c$

Queremos demostrar: $U \cap W = \{\vec{0}\}$

Mediante: $\vec{0} \in U \cap W$ y si $\vec{x} \in U \cap W$ entonces $\vec{x} = \vec{0}$.

La primera no hace falta demostrarla, pues en todo subespacio está el vector nulo.

La segunda, $\vec{x} \in U \cap W$, se demuestra con $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in U \cap W \\ (-\vec{x}) \in U \cap W \end{array} \right\} \text{ y por ser subespacio: } \left. \begin{array}{l} \vec{x} \in U \\ (-\vec{x}) \in W \end{array} \right\} \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} \rightarrow \vec{x} = -\vec{x} = \vec{0}$$

(aplicando la condición b)

$c \Rightarrow a$

Queremos demostrar: $U + W$ es directa.

Si $\vec{x} \in U + W$ entonces existe un único $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W$ tales que $\vec{u} + \vec{w} = \vec{x}$.

Como $U \cap W = \{\vec{0}\}$,

Si $\vec{x} \in U + W \rightarrow$

- existen $\vec{u} \in U$ y $\vec{w} \in W$ / $\vec{u} + \vec{w} = \vec{x}$ (definición de subespacio)
- son únicos

Suponiendo otros vectores $\vec{u}_1 \in U$ y $\vec{w}_1 \in W$ / $\vec{u}_1 + \vec{w}_1 = \vec{x}$

$$\vec{x} = \vec{x} \rightarrow \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 \rightarrow \vec{u} - \vec{u}_1 = \vec{w}_1 - \vec{w}$$

$\in U \qquad \in W$

Como $(\vec{u} - \vec{u}_1 = \vec{w}_1 - \vec{w}) \in U \cap W$, aplicando la condición c:

$$\vec{u} - \vec{u}_1 = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_1 \\ \vec{w} = \vec{w}_1 \end{cases}$$

Subespacios vectoriales suplementarios

Se dice que dos subespacios son suplementarios si el propio espacio vectorial es suma directa de ellos.

- *Ejemplo:*

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$$

$$W = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{a(1,0,0) + b(0,1,0) \mid a, b \in R\} = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$$

$$W = \langle (0,1,1) \rangle = \{c(0,1,1) \mid c \in R\} = \{(0, c, c) \mid c \in R\}$$

$$U + W = \{(a, b, 0) + (0, c, c) \mid a, b, c \in R\} = \{(a, b+c, c) \mid a, b, c \in R\} = R^3$$

3. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Como se ha visto, una combinación lineal de vectores es toda expresión del tipo $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ y $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$.

Atendiendo a cuándo la combinación lineal es $\vec{0}$, hay ejemplos obvios:

$$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n$$

(combinación lineal trivial)

Un conjunto de vectores se dice **linealmente independiente**, o que es un **sistema libre** si la única combinación lineal igual al vector nulo es la trivial. En caso contrario, se dice que es **linealmente dependiente** o que es un **sistema ligado**.

- *Ejemplo:* En R^3 , el conjunto: $\{(1,1,0), (1,0,0), (3,2,0)\}$

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,0) + \lambda_3(3,2,0) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, 0, 0) + (3\lambda_3, 2\lambda_3, 0) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3, 0) = (0,0,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda_3 = a \\ \lambda_1 = -2a \\ \lambda_2 = -a \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}} \right\} \text{sistema ligado}$$

Es un sistema ligado, puesto que los escalares dependen del parámetro a , es decir, hay infinitas combinaciones que dan la combinación lineal trivial.

Propiedades

- Cualquier vector no nulo forma un sistema libre.
- Todo sistema que contenga al vector nulo es ligado.
- Cualquier subconjunto de un sistema libre es libre.
- Si un sistema es ligado, al añadirle vectores se obtiene otro sistema ligado.
- Si un sistema es ligado, al menos uno de los vectores se puede escribir como combinación lineal de los restantes.

Demostración de la última propiedad:

Sea $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes.

$$\exists i / \lambda_i \neq 0$$

$\lambda_i \vec{x}_i$ tiene un opuesto, que al sumarlo en ambos miembros de la combinación lineal:

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = -\lambda_i \vec{x}_i$$

λ_i puede pasar dividiendo, pues es distinto de cero, quedando:

$$-\frac{\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{x}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{x}_{i+1} + \dots + \lambda_n \vec{x}_n}{\lambda_i} = \vec{x}_i$$

$$\vec{x}_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} \vec{x}_1 + \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \vec{x}_n, \text{ es decir, es una combinación lineal de los demás.}$$

4. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial sobre K .

Se dice que un conjunto de vectores S es un **sistema generador** si se cumple que el subespacio generado por éste es todo el espacio vectorial.

$$S \subseteq V \quad \langle S \rangle = V$$

Un sistema es generador si todo vector de V es combinación lineal de vectores de S .

Se dice que un conjunto de vectores es una **base** si es un sistema generador libre.

$$B \text{ es base de } V \Leftrightarrow \begin{cases} \langle B \rangle = V \\ B \text{ es L.I.} \end{cases}$$

Dada una base cualquiera, todo vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la misma. Así, puede utilizarse una escritura simplificada:

$$B = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$$

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$$

\vec{x} se representa por $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en B

El objetivo de emplear una base es, pues, poder representar los vectores mediante escalares, para facilitar así las operaciones entre ellos. En principio, el inconveniente se presentaría a la hora de ver si dos representaciones (grupos de escalares) distintas se corresponden con un mismo vector, es decir, si:

$$\vec{x} \text{ puede escribirse como } \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \text{ y como } \vec{x} = \mu_1 \vec{x}_1 + \dots + \mu_n \vec{x}_n$$

Teorema: Todo vector \vec{x} se escribe como combinación lineal de los vectores de la base de forma única.

Se escribe como combinación lineal de los vectores de la base, porque $\langle B \rangle = V$.

Se escribe de forma única, porque B es linealmente independiente.

Demostración de que se escribe de forma única:

Suponiendo que

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \\ \vec{x} &= \mu_1 \vec{x}_1 + \dots + \mu_n \vec{x}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n &= \mu_1 \vec{x}_1 + \dots + \mu_n \vec{x}_n \\ \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n - \mu_1 \vec{x}_1 - \dots - \mu_n \vec{x}_n &= \vec{0} \\ (\lambda_1 - \mu_1) \vec{x}_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \vec{x}_n &= \vec{0} \end{aligned}$$

Como es linealmente independiente, la combinación resultante es la trivial, luego:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 - \mu_1 &= 0 \\ \dots & \\ \lambda_n - \mu_n &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 \\ \dots & \\ \lambda_n &= \mu_n \end{aligned} \right\}$$

Cualquier grupo de vectores que cumplan las condiciones pueden actuar como base. Generalmente se utiliza la llamada **base canónica**, compuesta por una serie de vectores de la forma \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ...

A la hora de expresar un vector \vec{x} :

- $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$ es *correcto*.
- \vec{x} se representa por $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en B es *correcto*.
- $\vec{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ es *incorrecto*.

En conclusión, los vectores se encuentran relacionados con los espacios vectoriales del conjunto R (R^2 , $R^3 \dots$), lo que lleva a hablar de un **isomorfismo** entre el conjunto de los vectores y de los reales.

Teorema: Dado un espacio vectorial V , toda base de V tiene el mismo número de vectores, que llamaremos **dimensión del espacio vectorial**.

$$\dim(V)$$

- En el *plano*: $\dim(V) = 2$
- En el *espacio*: $\dim(V) = 3$

...

Este teorema también afecta a los subespacios vectoriales.

Ejercicio: Encontrar la dimensión del siguiente subespacio vectorial de R^3 :
 $U = \{(a, b, b) \mid a, b \in R\}$.

Propiedades

- Si U es un subespacio de V , $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Ejercicio: Demostrar la propiedad anterior. (Sugerencia: demostrar que $\dim(U) > \dim(V)$ es falso).

- $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$ (el vector nulo siempre es linealmente dependiente).
- $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$
- $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

Demostración:

Dada la base de un espacio vectorial V :

$$\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \dots, \vec{x}_n\} \text{ base de } V$$

$$U = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \rangle$$

$$W = \langle \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_n \rangle \quad U \text{ y } W \text{ son suplementarios } (U \oplus W = V)$$

$$\begin{aligned} \dim(U) &= m; \quad \dim(W) = (n - m) \\ \dim(U) + \dim(W) &= n = \dim(U \oplus W) \end{aligned}$$

5. ESPACIO VECTORIAL PRODUCTO Y ESPACIO VECTORIAL COCIENTE

a) Espacio vectorial producto

Sean los espacios vectoriales $(V, +, \cdot)$ y $(V', +, \cdot)$ sobre K .

$$V \times V' = \{(\vec{x}, \vec{x}') / \vec{x} \in V \text{ y } \vec{x}' \in V'\}$$

Se definen las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} +: (V \times V') \times (V \times V') &\rightarrow (V \times V') \\ (\vec{x}, \vec{x}') + (\vec{y}, \vec{y}') &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x}' + \vec{y}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet: K \times (V \times V') &\rightarrow (V \times V') \\ \lambda(\vec{x}, \vec{x}') &= (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}') \end{aligned}$$

$(V \times V', +, \cdot)$ es espacio vectorial sobre K .

$$\dim(V \times V') = \dim(V) + \dim(V')$$

Demostración:

Sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ base de V , $\dim(V) = n$

Sea $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m\}$ base de V' , $\dim(V') = m$

Sea $\{(\vec{x}_1, \vec{0}), \dots, (\vec{x}_n, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{y}_1), \dots, (\vec{0}, \vec{y}_m)\}$ base de $V \times V'$

Hay que demostrar que los vectores de esta última base son linealmente independientes (hacerlo como **Ejercicio**) y que cualquier vector puede escribirse como combinación lineal de ellos (se demostrará ahora).

$$\text{Sea el vector } (\vec{x}, \vec{x}') \left. \begin{array}{l} \vec{x} \in V \\ \vec{x}' \in V' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \\ \vec{x}' = \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_m \vec{y}_m \end{array}$$

$$(\vec{x}, \vec{x}') = (\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n, \mu_1 \vec{y}_1 + \dots + \mu_m \vec{y}_m)$$

Por la definición de suma:

$$(\vec{x}, \vec{x}') = (\lambda_1 \vec{x}_1, \vec{0}) + \dots + (\lambda_n \vec{x}_n, \vec{0}) + (\vec{0}, \mu_1 \vec{y}_1) + \dots + (\vec{0}, \mu_m \vec{y}_m)$$

Por la definición de producto escalar:

$$(\vec{x}, \vec{x}') = \lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{0}) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n, \vec{0}) + \mu_1 (\vec{0}, \vec{y}_1) + \dots + \mu_m (\vec{0}, \vec{y}_m)$$

Donde $(\vec{x}_1, \vec{0}), (\vec{x}_n, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{y}_1) \dots$ son los vectores de la base.

Por lo tanto, $\dim(V \times V') = \dim(V) + \dim(V')$.

b)

c) Espacio vectorial cociente

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre K y U un subespacio vectorial de V .

Dada la siguiente relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva):

$$\vec{x} \Re \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{y} \in U$$

Se define la clase del vector nulo como:

$$[\vec{0}] = \{\vec{x} \in V / \vec{x} - \vec{0} \in U\} = U$$

El conjunto cociente o conjunto de clases de equivalencia se expresa como V/U .

Se definen dos operaciones:

$$\begin{aligned} +: V/U \times V/U &\rightarrow V/U \\ [\vec{x}] + [\vec{y}] &= [\vec{x} + \vec{y}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet: K \times V/U &\rightarrow V/U \\ \lambda[\vec{x}] &= [\lambda\vec{x}] \end{aligned}$$

La dimensión de este espacio vectorial es:

$$\begin{aligned} \dim(V) = n \quad \dim(U) = m \leq n \\ \dim(V/U) = n - m \end{aligned}$$

Demostración:

Se demostrará partiendo de que la clase $[\vec{0}]$ es el elemento neutro para la suma.

Sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ base de U .

Sea $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_n\}$ base de V .

Entonces $\{\vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_n\}$ es base del subespacio suplementario de U .

Además, $\{[\vec{x}_{m+1}], \dots, [\vec{x}_n]\}$ es base de V/U .

Ejercicio: Demostrar que los vectores de la última base son linealmente independientes.

Además, hay que demostrar que la última base es un sistema generador. Para ello, se tendrá en cuenta que cualquier clase de equivalencia puede escribirse como combinación lineal de clases de la base.

$$[\vec{x}] \in V/U$$

$$\begin{aligned}\vec{x} \in V &\rightarrow \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \\ [\vec{x}] &= [\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m + \dots + \lambda_n \vec{x}_n] \\ [\vec{x}] &= [\lambda_1 \vec{x}_1] + \dots + [\lambda_m \vec{x}_m] + [\lambda_{m+1} \vec{x}_{m+1}] + \dots + [\lambda_n \vec{x}_n] \\ &\in U \qquad \qquad \in U \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &[\vec{0}] \qquad \qquad [\vec{0}] \\ [\vec{x}] &= [\vec{0}] + \dots + [\vec{0}] + [\lambda_{m+1} \vec{x}_{m+1}] + \dots + [\lambda_n \vec{x}_n] \\ [\vec{x}] &= [\lambda_{m+1} \vec{x}_{m+1}] + \dots + [\lambda_n \vec{x}_n] \\ [\vec{x}] &= \lambda_{m+1} [\vec{x}_{m+1}] + \dots + \lambda_n [\vec{x}_n]\end{aligned}$$

Donde $[\vec{x}_{m+1}]$, $[\vec{x}_n]$... son vectores de la base.

Por lo tanto, $\dim(V/U) = n - m$

6. CAMBIOS DE BASE

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre K .

Sean las siguientes bases:

$B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ base de V

\vec{x} se representa por $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en B $\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

$B' = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V

\vec{x} se representa por (μ_1, \dots, μ_n) en B' $\vec{x} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_n \vec{v}_n$

Dada la siguiente relación entre las bases B y B' :

\vec{u}_1 se representa por $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$ en B' $\vec{u}_1 = a_{11} \vec{v}_1 + \dots + a_{n1} \vec{v}_n$
 \vec{u}_2 se representa por $(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})$ en B' $\vec{u}_2 = a_{12} \vec{v}_1 + \dots + a_{n2} \vec{v}_n$
 \dots
 \vec{u}_n se representa por $(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$ en B $\vec{u}_n = a_{1n} \vec{v}_1 + \dots + a_{nn} \vec{v}_n$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \\ \vec{x} &= \lambda_1 (a_{11} \vec{v}_1 + \dots + a_{n1} \vec{v}_n) + \dots + \lambda_n (a_{1n} \vec{v}_1 + \dots + a_{nn} \vec{v}_n) \\ \vec{x} &= (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{n1}) \vec{v}_1 + \dots + (\lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_n a_{nn}) \vec{v}_n\end{aligned}$$

Donde $\mu_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n}$ y $\mu_n = \lambda_1 a_{n1} + \dots + \lambda_n a_{nn}$.

El resultado es una combinación lineal que se da entre los propios coeficientes.

Un cambio de base no es más que hallar la relación existente entre dos bases diferentes, para poder así expresar cualquier vector de una de ellas mediante el empleo de la otra.

Esta relación puede obtenerse utilizando para ello matrices:

$$\mu_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n}$$

Partiendo de esto: ...

$$\mu_n = \lambda_1 a_{n1} + \dots + \lambda_n a_{nn}$$

Y colocando los vectores como matrices de tipo columna:

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n \text{ en } B \quad X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_n \vec{v}_n \text{ en } B' \quad X' = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

La combinación lineal de ambos quedaría como:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Llamando P a la matriz de los coeficientes en a :

$$X' = P \cdot X \quad X = P^{-1} X'$$

Para las matrices de cambio de base siempre puede calcularse su inversa, puesto que su determinante siempre será distinto de cero (no hay vectores linealmente dependientes que lo anulen).